Prof. Dr. Alfred Toth

Die Addition von Quantitäten

> Kirschen und Bergen empfand. Die Arithmetik mußte ganz anderes und Wunderbares leisten können, weshalb er an seinen Lehrer die Frage stellte: Wenn das Zusammensein von vielen Bergen ein Gebirge ergab, was ergäbe dann zahlenmäßig das Zusammensein, wenn man eine Kirche zu einem Krokodil addierte und dazu noch seine Mutter und obendrein ein Zahnweh. (Es ergab sich nämlich, daß gerade zu diesem Zeitpunkt seine Mutter an Zahnschmerzen litt.) Das erschien ihm als eine der Arithmetik würdige und hochinteressante Aufgabe. Als man ihm mitteilte, daß man die vier angeführten Daten eben nur als verschiedene Sachen zusammenzählen könne, hielt er das zuerst für ein Mißverständnis und bestand darauf, daß er keine Sachen, sondern eben Kirchen, Krokodile usw. addieren wolle. Und was ändere sich am Addieren, wenn man das Krokodil durch einen Löwen ersetze? Daß sich dann nichts ändere, wollte er nicht glauben. Später vergaß er das Problem. Er mußte fast 60 Jahre alt werden, bis es für ihn in der biologischen Computer-Theorie in neuer Gestalt wieder auftauchte.

Günther (1975, S. 41, Text aus:
www.vordenker.de/ggphilosophy/gg_selbstdarstellung.pdf)

1. Das bekannte Axiom, das besagt, daß nur gleiche Qualitäten addiert werden können, ist zwar verbreitet, aber es steht so m.W. in keiner Einführung in die Arithmetik (vgl. Toth 2014, 2015a, b).

Zunächst stellt sich die Frage, was „gleich" bedeutet. Diese Frage wird auf der Grundschule meist durch die beiden Gleichungen

1 Apfel + 1 Apfel = 2 Äpfel

1 Apfel + 1 Birne = ?

beantwortet. Zwar ist es möglich, in der zweiten Gleichung an der Stelle des Fragezeichens als Summe „2 Früchte" zu setzen, allein, der Übergang

(Apfel, Birne) → Frucht

impliziert bereits einen Qualitätsverlust.

Weiter stellt sich die Frage, was denn genau die beiden Summanden in der ersten Gleichung bedeuten – denn es gibt ja bekanntlich zahlreiche Apfelsorten, vgl. etwa das folgende Bild.

Tatsächlich ist es so, daß in einer dritten Gleichung

1 Cox Orange + 1 Golden Delicious = ?

das Fragezeichen in der Summe nur dann durch „2 Äpfel" ersetzt werden kann, wenn wiederum ein Qualitätsverlust in Kauf genommen werden – also genau wie in der zweiten Gleichung:

(Cox Orange, Golden Delicious) → Apfel.

Schließlich betzrachten wir Gleichungen der Form

1 Apfel + 1 Schälmesser = ?

1 Apfel + 1 Teller = ?

1 Apfel + 1 Uhr = ?

Wie man anhand der Gleichungen unschwer erkennt, ist also das „Axiom", daß nur gleiche Qualitäten addiert werden können, durch ein Axiom der folgenden Form zu ersetzen:

Axiom. Gleichungen, bei denen die Durchschnitte der Merkmalsmengen der durch die Summanden bezeichneten qualitativen Objekte leer sind, haben keine Summe, welche ein qualitatives Objekt bezeichnet.

2. Merkwürdigerweise ist aber dennoch die Addition verschiedener Qualitäten in bestimmten Fällen möglich.

2.1. Mischungsrechnungen

§ 34. Mischungsrechnungen.

I. An jedem Gegenstand ist zu unterscheiden: Quantität und Qualität.

Die **Quantität** ist entweder eine Raum- oder eine Gewichtsgröße.

Die **Qualität** ist keine Größe. Aber es giebt Größen, durch welche die Qualität einen mehr oder weniger vollkommenen Ausdruck erhält. Solche Größen sind z. B. Preis, specifisches Gewicht, Feingehalt ꝛc., oft auch willkürliche auf Schätzung beruhende Qualitätszahlen, Noten u. dgl.

Das Product aus Quantität und Qualität (d. h. der Quantitäts- und Qualitätszahlen) stellt uns den Gegenstand vollständig dar, und wollen wir daher dieses Product **das Moment** des Gegenstandes nennen.

Denkt man sich mehrere Gegenstände zu einem einzigen vereinigt (gemischt, legirt u. s. w.), so ist offenbar

a. **die Mischungsquantität gleich der Summe der einzelnen Quantitäten,**

b. **das Mischungsmoment gleich der Summe der einzelnen Momente.**

II. Die einfachste Mischungsaufgabe ist:

Die Mischungsqualität zu finden, wenn die einzelnen Quantitäten und Qualitäten gegeben sind.

Die Lösung folgt unmittelbar aus I, a und b.

Z. B. Jemand legirt 50 gr Feingold, 80 gr Gold von Feingehalt 0,9, 70 gr Kupfer. Was ist der Feingehalt der Legirung?

	Quantität.	Qualität.	Moment.
	50 gr	1	50.
	80 gr	0,9	72.
	70 gr	0	0.
Mischung:	200 gr	x	122.

$$x = \frac{122}{200} = 0,61.$$

(Sickenberger 1875, S. 153 f.).

2.2. Reaktionsgleichungen

Beim **Reaktionsschema** wird die Reaktion nur **qualitativ** betrachtet:

$$Wasserstoff + Sauerstoff \rightarrow Wasser$$

Es geht also nur darum, welche Stoffe an der Reaktion beteiligt sind.

Eine **Reaktionsgleichung** dagegen enthält sowohl **qualitative** als auch **quantitative** Informationen:

$$2\,H_2 + O_2 \rightarrow 2\,H_2O$$

	Ethanol + Sauerstoff	⟶	Kohlenstoffdioxid + Wasser
	$C_2H_5OH + 3\,O_2$	$\longrightarrow$	$2\,CO_2 + 3\,H_2O$
Anzahl O-Atome	$1 + 3 \cdot 2$		$2 \cdot 2 + 3 \cdot 1$
Anzahl H-Atome	$5 + 1$		$3 \cdot 2$
Anzahl C-Atome	$1 \cdot 2$		$2 \cdot 1$

(chemie-digital.zum.de)

Der Grund, warum diese Fälle möglich, folgt direkt aus unserem Axiom: In beiden Fällen 2.1. und 2.2. enthalten nämlich die Summen qualitative Merkmale der durch die Summanden bezeichneten Objekte – und zwar unter der Zusatzbedingung, daß SÄMTLICHE Merkmale der Summanden in der Summe enthalten sein müssen.

3. Ein solches Axiom, das auf die Semiotik und die Ontik referiert, indem es die Zahlen im Sinne Benses (vgl. Bense 1992) als Zeichen behandelt und indem es die von ihnen bezeichneten Objekte hinsichtlich ihrer Qualität betrachtet (vgl. Toth 2010), widerspricht also der seit jeher in der Arithmetik üblichen Einführung der Zahlen als „Dinge", vgl. etwa den Anfang von Landaus bekanntem Buche (Landau 1930, S. 1):

Wir nehmen als gegeben an:

Eine Menge, d. h. Gesamtheit, von Dingen, natürliche Zahlen genannt, mit den nachher aufzuzählenden Eigenschaften, Axiome genannt.

Vor der Formulierung der Axiome sei einiges in bezug auf die benutzten Zeichen = und ≠ vorangeschickt.

Kleine lateinische Buchstaben bedeuten in diesem Buch, wenn nichts anderes gesagt wird, durchweg natürliche Zahlen.

Ist x gegeben und y gegeben, so sind

entweder x und y dieselbe Zahl; das kann man auch

$$x = y$$

schreiben (= sprich: gleich);

oder x und y nicht dieselbe Zahl; das kann man auch

$$x \neq y$$

Bemerkenswert ist, daß der landausche Übergang von

$1 \rightarrow x$

nicht nur völlig von Qualitäten abstrahiert, sondern auch einige Zwischenschritte unterschlägt, die wir im Anschluß an unsere obigenb Ausführungen wie folgt darstellen können:

1 Apfel + 1 Apfel = 2 Äpfel

1 Jonathanapfel + 1 Glockenapfel = ?

1 Apfel + 1 Birne = ?

1 Apfel + 1 Uhr = ?

$1 + 1 = 2$

$1_i + 1_j = ?$

$x + y = z$

Diese Gleichungen sind so angeordnet, daß jede (n+1)-te Gleichung einen Qualitätsverlust gegenüber der n-ten Gleichung enthält. Die Trennlinie markiert den Übergang von qualitativen Objekten zu quantitativen Zeichen. Landau berücksichtigt also nur die erste und die dritte der drei letzten Gleichungen. Damit übersieht er aber, daß selbst die harmlos ausschauende Gleichung

$1 + 1 = 2$

(wie die qualitativen Gleichungen über der Trennlinie zeigen), keineswegs eindeutig ist, dann nämlich nicht, wenn der erste und der zweite Summand – immer die Zahl als Zeichen und nicht als Ding aufgefaßt –, auf ein verschiedenes Objekt referieren.

Literatur

Bense, Max, Die Eigenrealität des Zeichens. Baden-Baden 1992

Günther, Gotthard, Selbstbildnis im Spiegel Amerikas. In: Pongratz, Ludwig (ed., Philosophie in Selbstdarstellungen. Bd. 1. Hamburg 1975, S. 1-75

Landau, Edmund, Grundlagen der Analysis. Leipzig 1930

Sickenberger, Adolf, Leitfaden der Arithmetik. München 1875

Toth, Alfred, Äpfel und Birnen. 2 Bde. Tucson, AZ, 2010

Toth, Alfred, 1 Apfel + 1 Apfel = 2 Äpfel? In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2014

Toth, Alfred, Eins plus eins gleich zwei. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015a

Toth, Alfred, Quantitativ-qualitative und qualitativ-quantitative Gleichungen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015b

19.5.2019